北京市十一学校四年制高一期末考试数学试卷

（考试时间：90分钟 总分：120分）

一．选择题（本题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只且仅有一项是符合题目要求的。）

1．已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=1\}$，$N=\{(x,y)\mid x-y=3\}$,则 $M\cap N=$（　　）

A．$\{x=2,y=-1\}$　　B．$(2,-1)$

C．$\{2,-1\}$　　D．$\{(2,-1)\}$

2．$\tan 300^{\circ}+\sin 450^{\circ}$ 的值为（　　）

A．$1+\sqrt{3}$　　B．$1-\sqrt{3}$

C．$-1-\sqrt{3}$　　D．$-1+\sqrt{3}$

3．若 $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos(\pi-\alpha)$，则 α 的取值集合为（　　）

A．$\{\alpha\mid\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{4}\quad k\in Z\}$

B．$\{\alpha\mid\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{4}\quad k\in Z\}$

C．$\{\alpha\mid\alpha=k\pi\quad k\in Z\}$

D．$\{\alpha\mid\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}\quad k\in Z\}$

4．已知函数 $f\left(x+1\right)=2^{x}$，那么 $f^{-1}(3)=$（　　）

A．4　　B．$\log_2 6$　　C．$1-\log_2 3$　　D．$\log_2 3$

5．设 $a=\log_{\frac{1}{3}}2$，$b=\log_{\frac{1}{4}}2$，$c=2^{\frac{1}{7}}$，则（　　）

A．$a<b<c$　　B．$c<b<a$

C．$c<a<b$　　D．$b<a<c$

6．设α角的终边上一点 P 的坐标是$(\cos\frac{\pi}{5},\sin\frac{\pi}{5})$，则$\alpha$等于（　　）

A．$\frac{\pi}{5}$　　　　B．$k\pi+\frac{\pi}{5}(k\in Z)$

C．$2k\pi+\frac{3}{10}\pi(k\in Z)$　　　　D．$2k\pi-\frac{9}{5}\pi(k\in Z)$

7．函数$f(x)=\ln x-\frac{2}{x}$的零点所在的大致区间是（　　）

A．$(\frac{1}{e},1)$　　B．（1，2）　　C．$(2,e)$　　D．$(e,+\infty)$

8．如果α是第三象限角，且满足$\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$，那么$\frac{\alpha}{2}$ 是（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

9．已知定义域为 R 的函数$f(x)$在$(4,+\infty)$上为减函数，且函数$y=f(x+4)$为偶函数，则（　　）

A．$f(3)>f(6)$　　B．$f(2)>f(5)$　　C．$f(3)>f(5)$　　D．$f(2)>f(3)$

10．已知定义在实数集R上的函数$f(x)$满足：对任意$x\in R$，都有$f(2+x)=f(-x)$，且当$x\geq 1$时，

$f(x)=3^x-1$，则有（　　）

A．$f(\frac{1}{3})<f(\frac{3}{2})<f(\frac{2}{3})$　　　　B．$f(\frac{2}{3})<f(\frac{3}{2})<f(\frac{1}{3})$

C．$f(\frac{2}{3})<f(\frac{1}{3})<f(\frac{3}{2})$　　　　D．$f(\frac{3}{2})<f(\frac{2}{3})<f(\frac{1}{3})$

二．填空题(本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分)

11．已知$a>b>1$，且$\log_a b+\log_b a=\frac{5}{2}$，则$\log_a b-\log_b a$的值等于________

12．若$f(x)=\begin{cases}f(x+1),x<1\\3^{-x},x\geq 1\end{cases}$,则$f(-1)=$______________.

13．已知$\sin(\alpha+\beta)=1$,则$\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha+3\beta)=$______________.

14．设$f(x)$是定义在 R 上的奇函数，又$f(x)$在$(-\infty,0)$是增函数，且$f(-2)$=0，则满足$f(\log_3 x)<0$的

x的取值范围为____________________；

15．设$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot an\beta}$，已知$\tan(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{1}{3}$，则$\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{1+\sin x\cdot\cos x}=$__________；

16．设M是ΔABC内一点（不含边界），且ΔABC的面积为 1，定义$f(M)=(m,n,p)=m+n+p$，其

中 m,n,p 分别是 $\Delta MBC,\Delta MAC,\Delta MAB$ 的面积，当 $f(M)=(\frac{1}{2},x,y)$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$ 的最小值是__________________.

三．解答题（本题有 4 小题，共 50 分． 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

17．(本小题满分 13 分) 若记 $A=(a,b),B=(m,n)$，定义运算 $A\cdot B=am+bn$，设 $A=(x,m),B=(1-x,x)$，其中 $x,m\in R$．定义 $f(x)=A\cdot B$．

（1）解不等式 $f(x)<x$；

（2）如果 $f(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递减，求实数 m 的取值范围；

（3）若 $f(x)<x$ 对任意 $x\in(2,+\infty)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

18．(本小题满分 13 分)已知关于 x 的方程 $2x^2-(\sqrt{3}+1)x+m=0$ 的两根为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，（其中 $\theta\in(0,2\pi)$，

求：（1）$\frac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 的值；

（2）实数 m 的值；

（3）θ 的值。

19．(本小题满分 10 分)已知 θ 为锐角，请用<u>三角函数的定义证明</u>：$1<\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

20．（本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$，且满足 $f(x)+f(-x)=0$

（1）求实数 a 的值；

（2）若 $F(x)=xf(x)$，判别 $F(x)$ 的符号且说明理由；

（3）当 $x\in[2,3]$ 时，关于 x 的方程 $t+\frac{x-1}{x+1}+f(x)=0$ 有实数解，求实数 t 的取值范围。

北京市十一学校四年制高一期末考试数学试卷

参考答案与评分标准

一．选择题：DBDBA　DCDAB

二．填空题：11．$-\frac{3}{2}$；　　12．$\frac{1}{3}$；　　13．0；

14．$\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{9}\text{或}1<x<9\right\}$；　　15．$-1$；　　16．18

16．解：∵ ΔABC 的面积为 1，

由 $f(M)$的定义知，$m+n+p=1$，且 $m>0$，$n>0$，$p>0$，

$\therefore\frac{1}{2}+x+y=1$，$\therefore x+y=\frac{1}{2}$，且 $x>0$，$y>0$.

$\therefore\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=2(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=2\left(5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)\geq18$，当且仅当 $x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{3}$时取等号.

$\therefore\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$的最小值为 18.

三．解答题：

17．解:由题意得 $f(x)=x(1-x)+mx$．…………………2 分

（1）　$\therefore f(x)<x\Leftrightarrow x^2-mx>0$，

若 $m>0$，则 $x<0$ 或 $x>m$；

若 $m=0$，则 $x\neq0$；

若 $m<0$，则 $x<m$或 $x>0$．

∴当 $m>0$时，不等式 $f(x)<x$ 的解集为 $(-\infty,0)\cup(m,+\infty)$；

当 $m=0$时，不等式 $f(x)<x$ 的解集为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

当 $m<0$时，不等式 $f(x)<x$ 的解集为 $(-\infty,m)\cup(0,+\infty)$．…………………6 分

(2)欲使 $f(x)=x(1-x)+mx=-x^2+(m+1)x$ 在(－2，＋∞)上单调递减，

需使 $\frac{m+1}{2}\leq-2$，解得 $m\leq-5$，

所以实数 m 的取值范围是 $m\leq-5$．…………………9 分

（3）欲使 $f(x)=x(1-x)+mx=-x^2+(m+1)x<x$

即 $x^2-mx>0$ 对任意 $x\in(2,+\infty)$ 恒成立，

即 $x-m>0$ 对任意 $x\in(2,+\infty)$ 恒成立，

即 $m<x$ 对任意 $x\in(2,+\infty)$ 恒成立，

需使 $m\le 2$

故：满足条件的 m 的取值范围是 $m\le 2$。…………………13 分

18．解：由题意可得：$\Delta=(\sqrt{3}+1)^2-8m\ge 0\Rightarrow m\le\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$，

且 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{m}{2}\end{cases}$，…………………2 分

（1）$\therefore \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$

$=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta$

$=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ ……………………………………………………………6 分

（2）由 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{m}{2}\end{cases}$ 可得 $1+m=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 满足 $m\le\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

$\therefore$ 所求 $m=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………………9 分

（3）由（2）得 $2x^2-(\sqrt{3}+1)x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0\Rightarrow x_1=\dfrac{1}{2},x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ …………………10 分

$\therefore \begin{cases}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ …………………12 分

$\because \theta\in(0,2\pi)$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$。…………………13 分

19．证明：设 $P(x,y)$ 为角 θ 终边上异于原点的任意一点，

$\because \theta$ 为锐角

$\therefore x>0, y>0$，

由三角函数的定义有：$\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$， …………………4 分

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{1+\dfrac{2xy}{x^2+y^2}}$， …………………6 分

$\because 0<2xy\le x^2+y^2 \Rightarrow 0<\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\le 1$（当且仅当 $x=y$ 即 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时取"="号）8 分

$\therefore 0<1+\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\le 2$，从而 $1<\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$。…………………………10 分

20．解：（1）由 $f(x)=a-\dfrac{2}{2^x+1}$ 和 $f(x)+f(-x)=0$

得 $a=\dfrac{1}{2^x+1}+\dfrac{1}{2^{-x}+1}=\dfrac{1}{2^x+1}+\dfrac{2^x}{2^x+1}=1$． …………………………4 分

(2)由（1）得 $f(x)=1-\dfrac{2}{2^x+1}$，

若 $x=0$，则 $f(x)=1-\dfrac{2}{2^x+1}=0 \Rightarrow F(x)=xf(x)=0$； …………………………5 分

若 $x>0$，则 $2^x>1 \Rightarrow 2^x+1>2 \Rightarrow 0<\dfrac{1}{2^x+1}<\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 0<\dfrac{2}{2^x+1}<1$

$\Rightarrow -1<-\dfrac{2}{2^x+1}<0$

$\Rightarrow 0<1-\dfrac{2}{2^x+1}<1$

$\Rightarrow f(x)=1-\dfrac{2}{2^x+1}\in(0,1)$

$\Rightarrow F(x)=xf(x)>0$； …………………………7 分

若 $x<0$，则 $0<2^x<1 \Rightarrow 1<2^x+1<2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2^x+1}<1$

$\Rightarrow 1<\dfrac{2}{2^x+1}<2$

$$\Rightarrow -2 < -\frac{2}{2^x+1} < -1$$

$$\Rightarrow -1 < 1-\frac{2}{2^x+1} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1-\frac{2}{2^x+1} \in (-1,0)$$

$$\Rightarrow F(x) = xf(x) > 0;$$

$\therefore F(x) = xf(x) \geq 0$。……………………………………………………9 分

（3）由（1）得 $t+\frac{x-1}{x+1}+f(x)=0 \Leftrightarrow t+\frac{x-1}{x+1}+1-\frac{2}{2^x+1}=0$

$$\Leftrightarrow t+1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{2}{2^x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow t+2=\frac{2}{x+1}+\frac{2}{2^x+1}$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{2}{x+1}+\frac{2}{2^x+1}-2$$ ……………………………12 分

$\because t=\frac{2}{x+1}+\frac{2}{2^x+1}-2$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，进而是 $[2,3]$ 上的减函数，

$\therefore -\frac{23}{18} \leq t \leq -\frac{14}{15}$，

$\therefore$ 使方程 $t+\frac{x-1}{x+1}+f(x)=0$ 有实数解的实数 t 的取值范围为 $[-\frac{23}{18},-\frac{14}{15}]$。……14 分