北京四中2011-2012学年度第一学期末测验高二年级数学（理）试卷

数学试卷（理）

（试卷满分为150分，考试时间为120分钟）

试卷分为两卷，卷（I）100分，卷（II）50分

（卷（I）和卷（II）的所有题目都在答题纸上作答）

卷（I）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分

1. 抛物线$y^2=8x$的焦点坐标为

A. $(1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(2,0)$　　D. $(0,2)$

2. 若a,b为异面直线，直线$c // a$，则c与b的位置关系是

A. 相交　　B. 异面　　C. 平行　　D. 异面或相交

3. 已知$\vec{a}=(2,-3,1)$，$\vec{b}=(4,2,x)$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则实数x的值是

A. -2　　B. 2　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

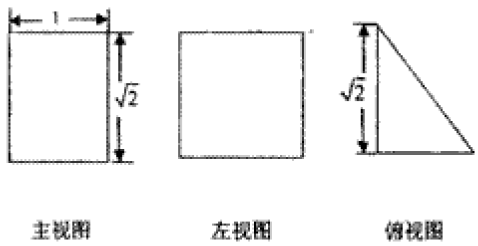
4. 若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1(a>0)$的离心率为2，则$a$等于

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 1

5. 若某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是

A. 2　　B. 1

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$



6. 已知$\triangle ABC$的顶点B,C在椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$上，顶点A是椭圆的一个焦点，且椭圆的另一个焦点在BC边上，则$\triangle ABC$的周长是

A. $2\sqrt{3}$　　B. 6　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 12

7. 过点$(2,4)$，与抛物线$y^2=8x$有且仅有一个公共点的直线有

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

8. 双曲线$8kx^2-ky^2=8$的一个焦点是$(0,3)$，那么k的值是

A. -1　　B. 1　　C. $-\frac{\sqrt{65}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{65}}{3}$

9. 已知直线l,m,n和平面α,β，在下列命题中真命题是

A. 若α内有无数多条直线垂直于β内的一条直线，则$\alpha\perp\beta$

B. 若α内有不共线的三点到β的距离相等，则$\alpha\parallel\beta$

C. 若l,m是异面直线，$l\parallel\alpha$，$m\parallel\alpha$，且$n\perp l$，$n\perp m$，则$n\perp\alpha$

D. 若$l\parallel\alpha$，$m\parallel\beta$，$\alpha\parallel\beta$，则$l\parallel m$

10. 过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F作倾斜角为45°的直线交抛物线于A,B两点，若线段AB的长为 8，则p的值是

A. 2　　B. 4　　C. $\frac{8}{5}$　　D. $\frac{16}{9}$

11. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P是侧面BB_1C_1C内一动点，若点P到直线BC的距离与点P到直线C_1D_1的距离相等，则动点P的轨迹所在的曲线是

A. 直线　　B. 椭圆　　C. 双曲线　　D. 抛物线

12. 已知直线$y=kx-2k-1$与曲线$y=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$有公共点，则$k$的取值范围是

A. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]\cup(0,+\infty)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分

13. 一个圆柱的侧面展开图是一个边长为1的正方形，则该圆柱的体积是________.

14. 已知椭圆中心在原点，一个焦点为$F(-2\sqrt{3},0)$，且长轴长是短轴长的2倍，则该椭圆的标准方程是________.

15. 已知三棱锥$S-ABC$中，$SA\perp$平面ABC，$AB\perp BC$，$SA=AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，则该三棱锥外接球的表面积等于________.

16. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$的两焦点为F_1,F_2，点$P(x_0,y_0)$满足$0<\frac{x_0^2}{2}+y_0^2<1$，则$|PF_1|+|PF_2|$的取值范围为________，直线$\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$与椭圆$C$的公共点个数是________.

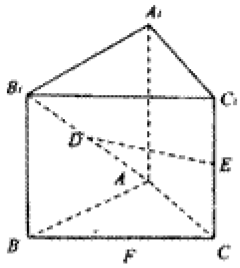
三、解答题：本大题共2小题，每小题12分，共24分

17. 已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1$，D、E、F分别为AB_1,CC_1,BC的中点.

（1）求证：DE//平面ABC；

（2）求证：$B_1F\perp$平面AEF；

（3）求二面角B_1-AE-F的大小.



18. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点为$F_2(3,0)$，离心率为$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）设直线$y=kx$与椭圆相交于A,B两点，M,N分别为线段AF_2,BF_2的中点. 若坐标原点O在以MN为直径的圆上，求k的值.

卷（Ⅱ）

一、选择题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

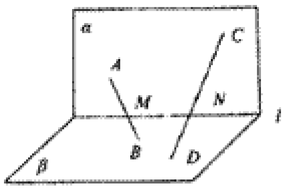
1. 已知点 P 是抛物线 $y^2=2x$ 上的一个动点，则点 P 到点 $(0,2)$ 的距离与点 P 到该抛物线准线的距离之和的最小值为

A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$　　B. 3　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\frac{9}{2}$

2. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点在同一球面上，且 $AB=2, AD=\sqrt{3}, AA_1=1$，则顶点 A,B 间的球面距离是

A. $2\sqrt{2}\pi$　　B. $\sqrt{2}\pi$　　C. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

3. 如图，平面 $\alpha\perp$ 平面 β，$\alpha\cap\beta=$ 直线 l，A,C 是 α 内不同的两点，B,D 是 β 内不同的两点，且 $A,B,C,D\notin l$，M,N 分别是线段 AB,CD 的中点.下列判断正确的是



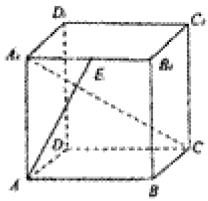
A. 当 $|CD|=2|AB|$ 时，M,N 两点不可能重合

B. M,N 两点可能重合，但此时直线 AC 与 l 不可能相交

C. 当 AB 与 CD 相交，直线 AC 平行于 l 时，直线 BD 可以与 l 相交

D. 当 AB,CD 是异面直线时，直线 MN 可能与 l 平行

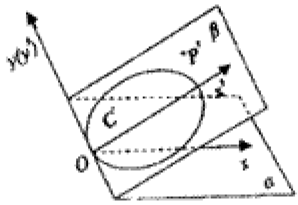
二、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分



4. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 A_1B_1 的中点，则异面直线 A_1C 与 AE 所成角的余弦值是__________.

5. 已知 F 是椭圆 C 的一个焦点，B 是短轴的一个端点，线段 BF 的延长线交 C 于点 D，且 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FD}$，则 C 的离心率为__________.

6. 如图，直角坐标系 xOy 所在的平面为 α，直角坐标系 $x'Oy'$（其中 y' 轴与 y 轴重合）所在的平面为 β，$\angle xOx'=45^\circ$，已知平面 β 内有一点 $P'(2\sqrt{2},2)$，则点 P' 在平面 α 内的射影 P 在坐标系 xOy 中的坐标为__________，已知平面 β 内的曲线 C' 的方程是 $\left(x'-\sqrt{2}\right)^2+2y'^2-2=0$，则曲线 C' 在平面 α 内的射影 C 在坐标系 xOy 中的方程是__________.

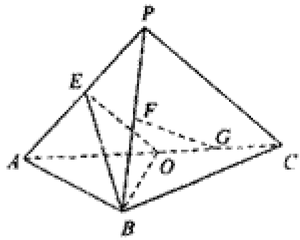


三、解答题：本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分

7. 如图，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形，E,F,O 分别为 PA,PB,AC 的中点，$AC=16$，$PA=PC=10$.

（1）设 G 是 OC 的中点，证明：$FG//$ 平面 BOE；

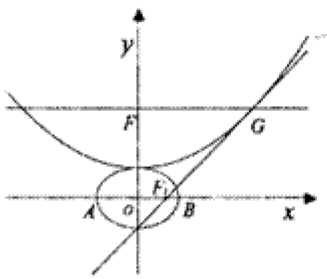
（2）问在 $\triangle ABO$ 内是否存在一点 M，使 $FM\perp$ 平面 BOE．若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.



8. 设 $b>0$，椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，抛物线方程为 $x^2=8(y-b)$．如图所示，过点 $F(0,b+2)$ 作 x 轴的平行线，与抛物线在第一象限的交点为 G，已知抛物线在点 G 的切线经过椭圆的右焦点 F_1.

（1）求满足条件的椭圆方程和抛物线方程；

（2）设 A,B 分别是椭圆长轴的左、右端点，试探究在抛物线上是否存在点 P，使得 $\triangle ABP$ 为直角三角形？若存在，请指出共有几个这样的点？并说明理由（不必具体求出这些点的坐标）.



参考答案

卷（I）

CDADB　CBACA　DB

13. $\frac{1}{4\pi}$；　14. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$；　15. 4π；　16. $[2,2\sqrt{2})$；0

17. 解：（1）取 AA_1 的中点 G，则 $DG // AB$，$EG // AC$，所以平面 $GDE //$ 平面 ABC，所以 $DE //$ 平面 ABC.

（2）连结 AF，则 $AF \perp$ 平面 BCC_1B_1.

$B_1F \perp AF, B_1F \perp EF$，所以 $B_1F \perp$ 平面 AEF.

（3）以 A 为坐标原点，分别以 AB, AC, AA_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $Oxyz$，则 $\overrightarrow{B_1F}=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$ 为平面 AEF 的法向量.

又 $\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1), \overrightarrow{AE}=(0,1,\frac{1}{2})$，设平面 AEB_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0$.

解得 $\begin{cases} x=-z \\ y=-\frac{1}{2}z \end{cases}$，取 $z=-1$，则 $\vec{n}=(1,\frac{1}{2},-1)$，从而

$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1F}}{|\vec{n}||\overrightarrow{FB_1}|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，即二面角 B_1-AE-F 是 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

18. 解：（1）由题意得 $\begin{cases} c=3 \\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$，得 $a=2\sqrt{3}$.

结合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a^2=12$，$b^2=3$.

所以，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）由 $\begin{cases} \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1, \\ y=kx, \end{cases}$ 得 $(3+12k^2)x^2-12\times3=0$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=0,x_1x_2=\dfrac{-12\times 3}{3+12k^2}$，

依题意，$OM\perp ON$，

易知，四边形OMF_2N为平行四边形，所以$AF_2\perp BF_2$，

因为$\overrightarrow{F_2A}=(x_1-3,y_1)$，$\overrightarrow{F_2B}=(x_2-3,y_2)$，

所以$\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=(x_1-3)(x_2-3)+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+9=0$.

即 $\dfrac{-12\times 3(1+k^2)}{3+12k^2}+9=0$，

解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

卷（Ⅱ）

A　C　B

4. $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$；　　5. $e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；　　6. $(2,2)$；$(x-1)^2+y^2=1$

7. 证明：（1）设PE中点为H，连结FH、GH.

则因为$FH\,//\,BE$，$GH\,//\,OE$，所以平面$FGH\,//$平面BOE，所以$FG\,//$平面BOE.

（2）以O为坐标原点，分别以OB,OC,OP所在直线为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系$Oxyz$，则$F(4,0,3)$.

设点M的坐标为$(x_0,y_0,0)$.则平面BOE的法向量为$\overrightarrow{FM}=(x_0-4,y_0,-3)$.

又因为$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{OE}=0$，解得$x_0=4,y_0=-\dfrac{9}{4}$.

在平面直角坐标系xOy中，ΔOAB内部区域可表示为不等式组$\begin{cases}x>0\\y<0\\x-y<8\end{cases}$，所以点$M$在$\Delta OAB$内部.

点M坐标是$\left(4,-\dfrac{9}{4},0\right)$.

8. 解：(1) 由 $x^2=8(y-b)$ 得 $y=\frac{1}{8}x^2+b$，

当 $y=b+2$ 得 $x=\pm4$，$\therefore$ G 点的坐标为 $(4,b+2)$，

法一：$GF_1: y=\frac{b+2}{4-b}(x-b)$，与抛物线联立，

$\Delta=0$，解得 $b=1$；

法二：由椭圆方程得 F_1 点的坐标为 $(b,0)$，

根据抛物线光学性质，$\therefore 4-b=b+2$ 即 $b=1$，即椭圆和抛物线的方程分别为

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 和 $x^2=8(y-1)$；

(2) $\because$ 过 A 作 x 轴的垂线与抛物线只有一个交点 P，

$\therefore$ 以 $\angle PAB$ 为直角的 $Rt\Delta ABP$ 只有一个，

同理，以 $\angle PBA$ 为直角的 $Rt\Delta ABP$ 只有一个.

若以 $\angle APB$ 为直角，设 P 点坐标为 (x,y)，A、B 两点的坐标分别为 $(-\sqrt{2},0)$ 和 $(\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x^2-2+y^2=y^2+8y-10=0$，

关于 y 的二次方程有一大于等于 1 的解，$\therefore x$ 有两解，

即以 $\angle APB$ 为直角的 $Rt\Delta ABP$ 有两个，

因此抛物线上存在四个点使得 ΔABP 为直角三角形.