

高中数学必修1(北师大版)知识点总结含同步练习题及答案

第三章 指数函数和对数函数 3.3 指数函数

一、知识清单

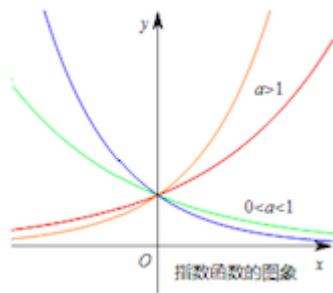
指数函数及其性质

二、知识讲解

1. 指数函数及其性质

描述：一般地，形如 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 的函数叫做指数函数 (exponential function)，其中 x 是自变量。

图象



定义域

\mathbf{R}

值域

$(0, +\infty)$

性质

① 过定点 $(0, 1)$ ；

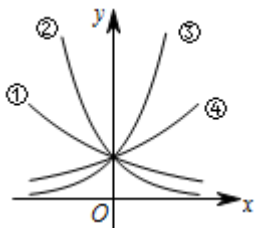
② 当 $0 < a < 1$ 时，在 \mathbf{R} 上是减函数；当 $a > 1$ 时，在 \mathbf{R} 上是增函数。

例题：下列函数：① $y = 6^x$ ；② $y = x^4$ ；③ $y = -4^x$ ；④ $y = (-4)^x$ ；⑤ $y = 2 \times 8^x$ ；⑥ $y = 2^x$ ；⑦ $y = 4^{x^2}$ ；⑧ $y = (2a - 1)^x (a > \frac{1}{2}, a \neq 1)$ ，其中是指数函数的是 ()

解：①⑥⑧

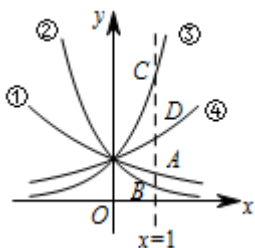
根据指数函数的定义进行判断。①⑥⑧ 为指数函数；② 不是指数函数，自变量不在指数上；③ 是 -1 与指数函数 4^x 的乘积；④ 中底数 $-4 < 0$ ，所以不是指数函数；⑤ 是 2 与指数函数 8^x 的乘积；⑦ 中指数不是 x ，而是 x^2 ，故 ②③④⑤⑦ 都不是指数函数。

如图所示的指数函数 ① $y = a^x$ ；② $y = b^x$ ；③ $y = c^x$ ；④ $y = d^x$ 的图象，则 a, b, c, d 与 1 的大小关系是 ()



- A. $a < b < 1 < c < d$ B. $b < a < 1 < d < c$ C. $1 < a < b < c < d$ D. $a < b < 1 < d < c$

解:



设 $x=1$ 与 ①②③④ 的图象分别交于点 A 、 B 、 C 、 D ，如图所示，则其坐标依次为 $(1, a)$ 、 $(1, b)$ 、 $(1, c)$ 、 $(1, d)$ ，由图象观察可得 $c > d > 1 > a > b$ ，故选 B.

比较下列各题中两个值的大小.

- (1) $1.7^{-2.5}$, 1.7^{-3} ; (2) $1.7^{0.3}$, $1.5^{0.3}$; (3) $1.7^{0.3}$, $0.8^{3.1}$.

解: (1) 考察函数 $y = 1.7^x$. 因为 $1.7 > 1$, 所以 $y = 1.7^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数. 因为 $-2.5 > -3$, 所以 $1.7^{-2.5} > 1.7^{-3}$.

(2) 考察函数 $y = 1.7^x$ 与 $y = 1.5^x$. 因为 $1.7 > 1.5$, 所以在 $(0, +\infty)$ 上, $y = 1.7^x$ 的图象位于 $y = 1.5^x$ 的图象的上方, 而 $0.3 > 0$, 所以 $1.7^{0.3} > 1.5^{0.3}$.

(3) 因为 $1.7^{0.3} > 1.7^0 = 1$, $0.8^{3.1} < 0.8^0 = 1$, 所以 $1.7^{0.3} > 0.8^{3.1}$.

解方程 $4^x + 2^x - 6 = 0$.

解: 原方程可化为

$$(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0,$$

令 $t = 2^x$, 则 $t > 0$, 所以

$$t^2 + t - 6 = 0.$$

解得 $t = 2$ 或 $t = -3$. 因为 $t > 0$, 所以 $t = 2$, 即 $2^x = 2$, 所以 $x = 1$.

若 $a^{-5x} > a^{x+7}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 求 x 的取值范围.

解: ① 当 $a > 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 是增函数, 所以 $-5x > x + 7$, 所以 $x < -\frac{7}{6}$.

② 当 $0 < a < 1$ 时, 因为 $y = a^x$ 是减函数, 所以 $-5x < x + 7$, 所以 $x > -\frac{7}{6}$.

求下列函数的单调区间和值域:

(1) $f(x) = 2^{-x^2+3x+2}$;

(2) $y = 4^x - 2^{x+1} + 5$.

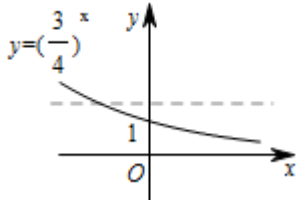
解: (1) 函数的定义域为 \mathbf{R} . 令 $t = -x^2 + 3x + 2$, 则 $y = 2^t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, 而 $t = -x^2 + 3x + 2$ 在 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ 上是增函数, 在 $[\frac{3}{2}, +\infty)$ 上是减函数, 所以

$f(x) = 2^{-x^2+3x+2}$ 在 $(-\infty, \frac{3}{2}]$ 上是增函数, 在 $[\frac{3}{2}, +\infty)$ 上是减函数.

(2) 函数的定义域为 \mathbf{R} , 令 $t = 2^x (t > 0)$, 则
 $y = (2^x)^2 - 2 \times 2^x + 5 = t^2 - 2t + 5 = (t - 1)^2 + 4$, 根据该函数的图象可得, $y \in [4, +\infty)$.
 当 $t \geq 1$ 时, $y = (t - 1)^2 + 4$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数, 又 $2^x \geq 1$, 即 $x \geq 0$, 且 $t = 2^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数, 由复合函数的单调性的判断方法知, 原函数在 $[0, +\infty)$ 上是增函数. 同理, 原函数在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数.

关于 x 的方程 $(\frac{3}{4})^x = \frac{3a+2}{5-a}$ 有负根, 求 a 的取值范围.

解:



如图所示, 要使 $(\frac{3}{4})^x = \frac{3a+2}{5-a}$ 有负根, 只需 $\frac{3a+2}{5-a} > 1$, 即 $\frac{4a-3}{5-a} > 0$, 该不等式等价于 $(4a-3)(5-a) > 0$, 解得 $\frac{3}{4} < a < 5$.

高考不提分, 赔付1万元, 关注快乐学kuailexue.com了解详情。