高中数学必修1(人教B版)知识点总结含同步练习题及答案

第三章 基本初等函数（I） 3.1 指数与指数函数

一、学习任务

1. 理解有理数指数幂的含义，了解实数指数幂的意义，能进行幂的运算.
2. 理解指数函数的概念和意义；理解指数函数的性质，会画指数函数的图象.
3. 了解指数函数模型的实际案例，会用指数函数模型解决简单的实际问题.

二、知识清单

幂的概念与运算	指数函数及其性质

三、知识讲解

1.幂的概念与运算

描述： 根式

一般地，如果 $x^n = a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根（ n th root），其中 $n \in \mathbf{N}^*, n > 1$. 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式（radical），这里 n 叫做根指数（radical exponent）， a 叫做被开方数（radicand）.

根式的性质

① 当 n 为奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数，均记为 $\sqrt[n]{a}$.

当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数，其中正的 n 次方根记为 $\sqrt[n]{a}$.

② $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

③ 当 n 为奇数时， $\sqrt[n]{a^n} = a$ ；当 n 是偶数时， $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a & ,a \geqslant 0, \\ -a & ,a < 0. \end{cases}$.

④ 负数没有偶次方根.

整数指数幂到分数指数幂的扩充

① 正整数指数幂： $a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a (n \in \mathbf{N}^*)$ ；

② 零指数幂： $a^0 = 1 (a \neq 0)$ ；

③ 负整数指数幂： $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in \mathbf{N}^*)$ ；

④ 分数指数幂： $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, 且 n > 1)$ ；

⑤ 负分数指数幂： $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^* 且 n > 1)$ ；

⑥ 0 的正分数指数幂等于 0 ， 0 的零指数幂和负分数指数幂没有意义.

无理数指数幂

一般地，无理数指数幂 a^α（$a > 0, \alpha$ 是无理数） 是一个确定的实数. 当 α 的不足近似值从小

于 α 的方向逼近 α 时， a^{α} 从小于 a^{α} 的方向逼近 a^{α} ；当 α 的过剩近似值从大于 α 的方向逼近 α 时， a^{α} 从大于 a^{α} 的方向逼近 a^{α} .

幂的运算性质

① 同底数幂相乘，底数不变，指数相加： $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ ；

② 幂的乘方，底数不变，指数相乘： $(a^m)^n=a^{mn}$ ；

③ 积的乘方，将各个因式分别乘方： $(ab)^n=a^n\cdot b^n$ ；

④ 同底数幂相除，底数不变，指数相减： $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ；

⑤ 分式乘方，将分子和分母分别乘方： $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$.

例题： 化简 $\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{a^{-3}}}\cdot\sqrt{(a^{-5})^{-\frac{1}{2}}(a^{-\frac{1}{2}})^{13}}$.

解：

$$\begin{aligned}原式&=(a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\cdot[(a^{-5})^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^{-\frac{1}{2}})^{13}]^{\frac{1}{2}}\\&=(a^0)^{\frac{1}{3}}\cdot(a^{\frac{5}{2}}\cdot a^{-\frac{13}{2}})^{\frac{1}{2}}\\&=(a^{-4})^{\frac{1}{2}}=a^{-2}.\end{aligned}$$

已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，求 $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}$ 的值.

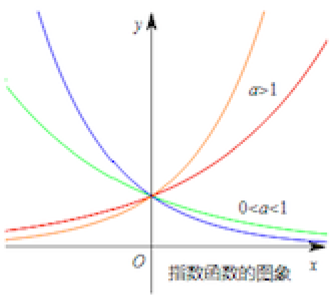
解：由 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$，设 $x^{\frac{1}{2}}=t$，则 $x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{t}$，所以 $t+\dfrac{1}{t}=3$，$t^2+\dfrac{1}{t^2}+2=9$，即 $t^2+\dfrac{1}{t^2}=7$，所以

$$\begin{aligned}原式&=\frac{t^3+\frac{1}{t^3}+2}{t^4+\frac{1}{t^4}+3}\\&=\frac{(t+\frac{1}{t})(t^2+\frac{1}{t^2}-1)+2}{(t^2+\frac{1}{t^2})^2-2+3}\\&=\frac{3\times(7-1)+2}{7^2-2+3}\\&=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$

2. 指数函数及其性质

描述： 一般地，形如 $y=a^x(a>0,且a\neq1)$ 的函数叫做指数函数（exponential function），其中 x 是自变量.

图象



定义域

R

值域

$(0,+\infty)$

性质

① 过定点 $(0,1)$ ；

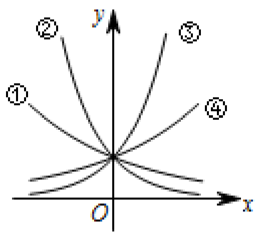
② 当 $0<a<1$ 时，在 **R** 上是减函数；当 $a>1$ 时，在 **R** 上是增函数.

例题： 下列函数：① $y=6^x$；② $y=x^4$；③ $y=-4^x$；④ $y=(-4)^x$；⑤ $y=2\times 8^x$；⑥ $y=2^x$；⑦ $y=4^{x^2}$；⑧ $y=(2a-1)^x(a>\dfrac{1}{2},a\neq 1)$，其中是指数函数的是（　　）

解：①⑥⑧

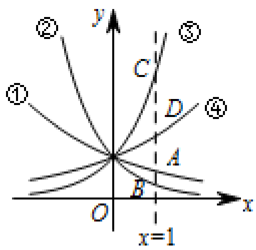
根据指数函数的定义进行判断. ①⑥⑧ 为指数函数；② 不是指数函数，自变量不在指数上；③ 是 -1 与指数函数 4^x 的乘积；④ 中底数 $-4<0$，所以不是指数函数；⑤ 是 2 与指数函数 8^x 的乘积；⑦ 中指数不是 x，而是 x^2，故 ②③④⑤⑦ 都不是指数函数.

如图所示的指数函数 ① $y=a^x$；② $y=b^x$；③ $y=c^x$；④ $y=d^x$ 的图象，则 a,b,c,d 与 1 的大小关系是（　　）



A. $a<b<1<c<d$　　B. $b<a<1<d<c$　　C. $1<a<b<c<d$　　D. $a<b<1<d<c$

解：



设 $x=1$ 与 ①②③④ 的图象分别交于点 A、B、C、D，如图所示，则其坐标依次为 $(1,a)$、$(1,b)$、$(1,c)$、$(1,d)$，由图象观察可得 $c>d>1>a>b$，故选 B.

比较下列各题中两个值的大小.

（1）$1.7^{-2.5}$，1.7^{-3}；（2）$1.7^{0.3}$，$1.5^{0.3}$；（3）$1.7^{0.3}$，$0.8^{3.1}$.

解：（1）考察函数 $y=1.7^x$. 因为 $1.7>1$，所以 $y=1.7^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数. 因为 $-2.5>-3$，所以 $1.7^{-2.5}>1.7^{-3}$.

（2）考察函数 $y=1.7^x$与$y=1.5^x$. 因为 $1.7>1.5$，所以在 $(0,+\infty)$上，$y=1.7^x$ 的图象位于 $y=1.5^x$ 的图象的上方，而 $0.3>0$，所以 $1.7^{0.3}>1.5^{0.3}$.

（3）因为 $1.7^{0.3}>1.7^0=1$，$0.8^{3.1}<0.8^0=1$，所以 $1.7^{0.3}>0.8^{3.1}$.

解方程 $4^x+2^x-6=0$.

解：原方程可化为

$$(2^x)^2+2^x-6=0,$$

令 $t=2^x$，则 $t>0$，所以

$$t^2+t-6=0.$$

解得 $t=2$ 或 $t=-3$．因为 $t>0$，所以 $t=2$，即 $2^x=2$，所以 $x=1$．

若 $a^{-5x}>a^{x+7}(a>0$ 且 $a\neq1)$，求 x 的取值范围．

解：① 当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 是增函数，所以 $-5x>x+7$，所以 $x<-\dfrac{7}{6}$．

② 当 $0<a<1$ 时，因为 $y=a^x$ 是减函数，所以 $-5x<x+7$，所以 $x>-\dfrac{7}{6}$．

求下列函数的单调区间和值域：

（1）$f(x)=2^{-x^2+3x+2}$；

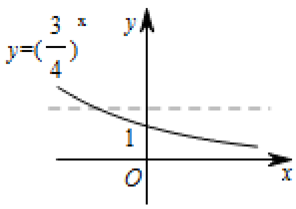
（2）$y=4^x-2^{x+1}+5$．

解：（1）函数的定义域为 $\mathbf{R}$．令 $t=-x^2+3x+2$，则 $y=2^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，而 $t=-x^2+3x+2$ 在 $(-\infty,\dfrac{3}{2}]$ 上是增函数，在 $[\dfrac{3}{2},+\infty)$ 上是减函数，所以 $f(x)=2^{-x^2+3x+2}$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right]$ 上是增函数，在 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上是减函数．

（2）函数的定义域为 $\mathbf{R}$，令 $t=2^x(t>0)$，则 $y=(2^x)^2-2\times2^x+5=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$，根据该函数的图象可得，$y\in[4,+\infty)$．当 $t\geq1$ 时，$y=(t-1)^2+4$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，又 $2^x\geq1$，即 $x\geq0$，且 $t=2^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，由复合函数的单调性的判断方法知，原函数在 $[0,+\infty)$ 上是增函数．同理，原函数在 $(-\infty,0]$ 上为增函数．

关于 x 的方程 $(\dfrac{3}{4})^x=\dfrac{3a+2}{5-a}$ 有负根，求 a 的取值范围．

解：



如图所示，要使 $(\dfrac{3}{4})^x=\dfrac{3a+2}{5-a}$ 有负根，只需 $\dfrac{3a+2}{5-a}>1$，即 $\dfrac{4a-3}{5-a}>0$，该不等式等价于 $(4a-3)(5-a)>0$，解得 $\dfrac{3}{4}<a<5$．

四、课后作业 （查看更多本章节同步练习题，请到快乐学kuailexue.com）

1. 函数 $y=a^{x+2}$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图象经过的定点坐标是（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(2,1)$　　C．$(-2,0)$　　D．$(-2,1)$

答案：D

2. 若指数函数 $y=a^x$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值的差是 1，则底数 a 等于（　　）

A．$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　B．$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$　　C．$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}\pm1}{2}$

答案： D

3. 设指数函数 $f(x)=a^x\,(a>0,a\neq1)$，则下列等式中不正确的是（　　）

A．$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

B．$f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$

C．$f(nx)=[f(x)]^n\quad(n\in\mathbf{Q})$

D．$f(xy)^n=[f(x)]^n\cdot[f(y)]^n\quad(n\in\mathbf{N}_+)$

答案： D

4. 设 $y_1=4^{0.9}$ ，$y_2=8^{0.44}$ ，$y_3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1.5}$ ，则（　　）

A．$y_3>y_1>y_2$　　B．$y_2>y_1>y_3$　　C．$y_1>y_2>y_3$　　D．$y_1>y_3>y_2$

答案： D